

Άλγεβρα Α' Λυκείου

Διαγώνισμα 1 (Πραγματικοί αριθμοί)

2025-2026

ΘΕΜΑ 1:

A. Να αποδείξετε ότι για θετικούς αριθμούς α, β και θετικό ακέραιο n ισχύει η ισοδυναμία:

i) $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^n > \beta^n$ και ii) $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^n = \beta^n$ (M.8,7)

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση. (M.10)

i) Αν α, β πραγματικοί και $\alpha \cdot \beta = 0$ τότε υποχρεωτικά $\alpha = \beta = 0$

ii) Αν α, β πραγματικοί και $\alpha < 0 < \beta$ τότε $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$.

iii) Αν α, β πραγματικοί μη μηδενικοί και ισχύει ότι: $\alpha^2 < \beta^2$ τότε $\alpha < \beta$.

iv) Αν α, β πραγματικοί αρνητικοί και ισχύει ότι: $\alpha^3 < \beta^3$ τότε $\alpha < \beta$.

v) Αν α, β, γ πραγματικοί με $\gamma < 0$ τότε ισχύει ότι: $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma^2 < \beta\gamma^2$

ΘΕΜΑ 2:

A. Να αποδείξετε ότι αν μ περιττός με $\mu \geq 3$ τότε οι αριθμοί $\mu, \frac{\mu^2-1}{2}, \frac{\mu^2+1}{2}$ είναι Πυθαγόρεια Τριάδα. (Δηλαδή πλευρές ορθογωνίου τριγώνου) (M.5)

B. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $(3\alpha-9)(6\alpha+18)+(3\alpha-9)(\alpha^2-9)+\alpha^2-9$ (M.8)

Γ. Αν $x + \frac{1}{x} = 3$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις $x^2 + \frac{1}{x^2}, x^3 + \frac{1}{x^3}, x^4 + \frac{1}{x^4}$ (M.12)

ΘΕΜΑ 3:

A. Αν α, β, γ πλευρές τριγώνου να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{\alpha+\beta} < \frac{2}{\alpha+\beta+\gamma}$ και

$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\beta+\gamma} + \frac{\gamma}{\gamma+\alpha} < 2$. (Στα τρίγωνα ισχύει η τριγων. ανισότ: κάθε πλευρά μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων) (M.8)

B. Να συγκρίνετε τους πραγματικούς αριθμούς α και β στις περιπτώσεις που i) $\alpha = x^2 + 4, \beta = 6x - 5$ και ii) $\alpha = x^3 - y$ και $\beta = x^2y - x$ αν $x > y$. (M.8)

Γ. Αν $x \in (k, l)$ δείξτε ότι αριθμοί: $y = \frac{x-k}{l-k}$ και $z = \frac{(x-k)^2}{-2lk + l^2 + k^2} \in (0, 1)$. (M.4,5)

ΘΕΜΑ 4:

A. Να αποδείξετε ότι $(\alpha + \beta)^2 = (\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta$ και μετά να βρείτε ποιο από όλα τα ορθογώνια με διαστάσεις α, β και εμβαδόν 25 τ.μ. έχει ελάχιστη περίμετρο. (M.12)

B. Αναμιγνύουμε X κιλά ενός διαλύματος αλκοόλης που κοστίζει χ ευρώ το κιλό με Ψ κιλά ενός άλλου διαλύματος αλκοόλης που κοστίζει ψ ευρώ το κιλό. Αν θέσουμε $\lambda = \frac{X}{\Psi}$ να αποδείξετε ότι το μείγμα κοστίζει $\alpha = \frac{\lambda\chi + \psi}{\lambda + 1}$ ευρώ το κιλό. Αν $X > \Psi$ να συγκρίνετε την τιμή α ανά κιλό του τελικού διαλύματος με το μέσον όρο $\frac{\chi + \psi}{2}$ των τιμών χ, ψ ανά κιλό το συστατικών του διαλύματος. **(M.7.6)**

ΚΑΘΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ.

Ασκησίοπολις